Практическое занятие №10.

Задачи для самостоятельной работы студента

Решение задач по темам: **Решение задач на вычисление определенных интегралов с использованием методов интегрирования.**

1) Вычислить определенный интеграл $\int_{-1}^{2} x^2 dx$, рассматривая его как предел интегральной суммы
Римана и производя разбиение промежутка интегрирования надлежащим образом.

2) С помощью определенного интеграла найдите предел следующих сумм:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)$

3) Вычислите определенные интегралы.

a) $\int\limits_1^2\left(2x^2+\frac{2}{x^4}\right)dx$. b) $\int\limits_1^{e^3}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$. c) $\int\limits_1^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{1+x^2}\,dx$. d) $\int\limits_3^8\frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$ e) $\int\limits_0^{\pi} x\cdot\sin xdx$

f) $\int\limits_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx.$ g) $\int\limits_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$ h) $\int\limits_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx.$ k) $\int\limits_1^9 x\sqrt[3]{1-x}\,dx.$ l) $\int_0^1 x(2-x^2)^{12}dx$

ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

<u>Задачи из Лекции №10 (ФИТ)</u>

<u>**Пример 1-.**</u> Вычислить определенные интегралы:

1) $\int\limits_0^1 x^2dx$ **2)** $\int\limits_1^2 2^{3x-4}dx$ **3)** $\int\limits_0^8\left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$. **4)** $\int\limits_0^1 x\cdot(2-x^2)^5dx$ **5)** $\int\limits_0^5\frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$ **6)** $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{dx}{e^x-e^{-x}}$

7) $\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}dx$ **8)** $\int\limits_0^{\pi}dx$ **9)** $\int\limits_0^1\ln(1+x)\,dx$ **10)** $\int\limits_1^2 xe^xdx$ **11)** $\int\limits_0^{\pi/2}x\cos xdx.$ **12)** $\int\limits_1^e x\ln^2 xdx.$

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Пример:

1. Постоянная функция $f(x) = C$ интегрируема на $[a,b]$, так как для любых разбиений и любого выбора точек ξ_i интегральные суммы имеют одно и то же значение

$$I(x_i,\xi_i)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta\zeta_i=C\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=C(b-a).$$

Пример:

вычислить $I=\int\limits_{-1}^{4}(1+x)\,dx$ как предел интегральных сумм.

Разобьем сегмент $[-1,4]$ на n равных частей. На каждом сегменте $[x_{i-1},x_i]=\left[-1+\frac{5(i-1)}{n},\,-1+\frac{5i}{n}\right]$ непрерывная функция $1+x$ достигает точной нижней грани на левом конце сегмента, а точной верхней — на правом. Поэтому

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f\left(-1 + \frac{5(i-1)}{n}\right) \cdot \frac{5}{n} = \\ = \sum_{i=1}^{n} \frac{5}{n}(i-1)\frac{5}{n} = \frac{25}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1),$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f\left(-1 + \frac{5i}{n}\right) \cdot \frac{5}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{5}{n} \cdot i \cdot \frac{5}{n} = \frac{25}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i.$$

Отсюда

$$S - s = \frac{25}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n}(i-1)\right) = \frac{25}{n^2}n = \frac{25}{n} < \varepsilon,$$

если $n > 25/\varepsilon$, т. е. при таком числе n точек разбиения сегмента $[-1, 4]$ выполнено неравенство (1). Значит, по теореме 2 интеграл $I = \int\limits_{-1}^{4}(1+x)\,dx$ существует.

Чтобы вычислить его как предел интегральных сумм, можно рассмотреть любую последовательность интегральных сумм, у которой $\Delta \to 0$, поскольку из существования интеграла следует, что предел любой последовательности интегральных сумм при измельчении разбиения существует и равен I.

Возьмем, например, последовательность интегральных сумм, соответствующую разбиениям сегмента $[-1, 4]$ на n равных частей $(n = 1, 2, \ldots)$ и выбору в качестве точек ξ_i правых концов частичных сегментов. В этом случае для возрастающей функции $f(x) = 1 + x$ интегральная сумма равна верхней сумме $S = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{25}{n^2} i$, откуда получаем

$$I = \int_{-1}^{4}(1+x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{25}{n^2}i = \lim_{n\to\infty}\frac{25n(n+1)}{2n^2} = \frac{25}{2}.$$

Итак, $\int\limits_{-1}^{4}(1+x)\,dx = 25/2$. ▲

Пример: Вычислить

32. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n,\ S_n = \frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \ldots + \sqrt{1+\frac{n}{n}}\right).$

◄ Поскольку $S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}} = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$, где $f(x) = \sqrt{1+x}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\xi_i = x_i = \frac{i}{n}$, $i = \overline{1, n}$, $\Delta x_i = \frac{1}{n}$, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1). \ ►$$

33. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, $S_n = \sin\frac{\pi}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$.

◀ Поскольку $\sin\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} O\left(\frac{1}{n^3}\right)\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}} = 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}.$$

Но $\frac{\pi}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}} = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$, где $f(x) = \frac{1}{2+\cos x}$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $\xi_k = k\frac{\pi}{n}$, $k = \overline{1, n}$, $\Delta x_k = \frac{\pi}{n}$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^{\pi}\frac{dx}{2+\cos x} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+0{,}5\cos x} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right]\right)\Bigg|_0^{\pi-0} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Пример:

9. Вычислить $I = \int\limits_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx$.

△ Разбивая интеграл I на сумму интегралов по сегментам $[1/e, 1]$ и $[1, e]$ (чтобы "освободиться от модуля") и применяя в каждом интеграле формулу интегрирования по частям, получим

$$I = -\int_{1/e}^{1}\ln x\,dx + \int_1^e \ln x\,dx = -x\ln x\Big|_{1/e}^{1} + \int_{1/e}^{1} dx + x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e dx =$$

$$= -\frac{1}{e} + \left(1 - \frac{1}{e}\right) + e - (e-1) = 2\left(1 - \frac{1}{e}\right).\ ▲$$

9.1.26. **Найти значение интеграла $\int\limits_0^2 f(x)\,dx$, если**

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & 0 \leqslant x < 1; \\ 2, & 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

Подынтегральная функция имеет на отрезке $[0; 2]$ одну точку разрыва ($x = 1$) первого рода, ограничена на нем.
Тогда:

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 e^x\,dx + \int_1^2 2\,dx =$$

$$= e^x\Big|_0^1 + 2x\Big|_1^2 = e - 1 + 4 - 2 = e + 1.\ ●$$

9.1.46. **Вычислить интеграл $\int\limits_1^9 \frac{dx}{5+2\sqrt{x}}$ с помощью замены переменных.**

Применим подстановку $\sqrt{x} = t$. Тогда $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$.
Находим новые пределы интегрирования:

x	1	9
$t = \sqrt{x}$	1	3

.

$$\int_1^9 \frac{dx}{5+2\sqrt{x}} = \int_1^3 \frac{2t\,dt}{5+2t} = \int_1^3 \frac{2t+5-5}{2t+5}\,dt =$$

$$= \int_1^3 \Big(1 - \frac{5}{2t+5}\Big)\,dt = t\Big|_1^3 - 5\cdot\frac{1}{2}\ln|2t+5|\Big|_1^3 =$$

$$= 3 - 1 - \frac{5}{2}(\ln 11 - \ln 7) = 2 - \frac{5}{2}\ln\frac{11}{7}. \quad \bullet$$

9.1.51. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$ с помощью подстановки.

○ Положим $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Тогда получаем $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Пределы интегрирования $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & 0 & 1 \end{array}$.

Следовательно,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x} = \int_0^1 \frac{\frac{2}{1+t^2}\,dt}{3+2\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int_0^1 \frac{2}{t^2+5}\,dt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}}\Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}. \quad \bullet$$

9.1.52. При помощи замены переменной вычислить интеграл

$$\int_2^3 x(3-x)^7\,dx.$$

○ Полагая $t = 3 - x$, получим: $x = 3 - t$, $dx = -dt$. Пределы интегрирования $\begin{array}{c|c|c} x & 2 & 3 \\ \hline t & 1 & 0 \end{array}$.

$$\int_2^3 x(3-x)^7\,dx = \int_1^0 (3-t)t^7(-dt) = \int_1^0 (t^8 - 3t^7)\,dt =$$

$$= \Big(\frac{t^9}{9} - \frac{3}{8}t^8\Big)\Big|_1^0 = -\frac{1}{9} + \frac{3}{8} = \frac{19}{72}. \quad \bullet$$

9.1.59. Вычислить при помощи подстановки интеграл

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}.$$

○ Пусть $x = \frac{1}{t}$. Тогда $dx = -\frac{1}{t^2}\,dt$. $\begin{array}{c|c|c} x & 1 & 2 \\ \hline t & 1 & \frac{1}{2} \end{array}$. Получаем

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{-\frac{1}{t^2}\,dt}{\frac{1}{t}\cdot\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+1}} = -\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}} =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{d\big(t+\frac{1}{2}\big)}{\sqrt{\big(t+\frac{1}{2}\big)^2 + \big(\frac{\sqrt{3}}{2}\big)^2}} = \ln\Big|t + \frac{1}{2} + \sqrt{t^2+t+1}\Big|\Big|_{\frac{1}{2}}^1 =$$

$$= \ln\frac{3+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{7}}. \quad \bullet$$

9.1.61. Вычислить интеграл $\int\limits_0^2 \frac{dx}{(4+x^2)^2}$ при помощи замены переменной.

◐ Применим подстановку $x = 2\operatorname{tg} t$. Тогда $dx = \frac{2}{\cos^2 t}\,dt$,

x	0	2
t	0	$\frac{\pi}{4}$

:

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{(4+x^2)^2} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\,dt}{\cos^2 t(4+4\operatorname{tg}^2 t)^2} =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\,dt}{16\cos^2 t\cdot\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^2} = \frac{1}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{1}{16}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{16}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{1}{16}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi+2}{64}. \quad ●$$

9.1.86. Вычислить интеграл $\int\limits_1^e (x+1)\ln x\,dx$.

◐ Применим формулу интегрирования по частям. Положим $u = \ln x$, $dv = (x+1)dx$. Тогда $du = \frac{1}{x}\,dx$, $v = \frac{x^2}{2}+x$. По формуле (1.6) имеем

$$\int\limits_1^e (x+1)\ln x\,dx = \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x\Big|_1^e - \int\limits_1^e \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{e^2}{2}+e-0-\left(\frac{x^2}{4}+x\right)\Big|_1^e = \frac{e^2}{2}+e-\frac{e^2}{4}-e+\frac{1}{4}+1 = \frac{e^2+5}{4}. \quad ●$$

9.1.91. Вычислить $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx$.

◐ Положим $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$. Тогда $du = \frac{1}{1+x^2}\,dx$, $v = x$. Имеем

$$\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\pi-\ln 4}{4}. \quad ●$$

9.1.95. Найти значение $J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x^2\sin 2x\,dx$.

◐ Интегрируем по частям: $u = x^2$, $dv = \sin 2x\,dx$, $du = 2x\,dx$, $v = -\frac{1}{2}\cos 2x$.

$$J = -\frac{1}{2}x^2\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\cos 2x\cdot 2x\,dx = 0 + \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\,dx.$$

Снова интегрируем по частям: $u = x$, $dv = \cos 2x\,dx$, $du = dx$, $v = \frac{1}{2}\sin 2x$.

$$J = \frac{1}{2}x\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\sin 2x\,dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}. \quad ●$$